微积分 A(2) 期末复习—知识点部分

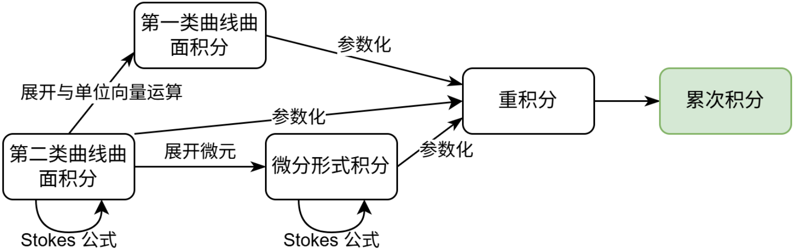
LRYP

2025 年 6 月 16 日

上半学期概念复习

- 多元函数的微分与梯度
- 隐函数定理
- 曲面的维数
- 曲面的参数化, 正则曲面与正则参数化
- 曲面的定向, 不同曲面表示时法向量的求法

求积分的思路


第一类曲线曲面积分
参数化
重积分
累次积分
展开与单位向量运算
参数化
第二类曲线曲面积分
展开微元
微分形式积分
参数化
Stokes 公式
Stokes 公式

重积分的定义

Step 1. 定义高维矩形的体积与直径.

Step 2. 定义高维矩形区域 I 上的积分:

- Riemann:
$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\max_{I_k\in\mathcal{P}} \mathrm{diam}(I_k)\to 0} \sum_{I_k\in\mathcal{P}} f(\xi_k)|I_k|$$
- Darboux:
$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{I_k\in\mathcal{P}} \inf_{x\in I_k} f(x)|I_k| = \inf_{\mathcal{P}} \sum_{I_k\in\mathcal{P}} \sup_{x\in I_k} f(x)|I_k|$$
- Lebesgue:
  Riemann 可积 $\iff$ 有界且 Darboux 可积 $\iff$ 有界且间断点零测.
- Fubini 定理: Riemann 可积时,
$$\int_{[a,b]\times[\alpha,\beta]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

重积分区域

Step 3. 定义一般有界区域 D 上的积分: 选一个大矩形 I 括住 D, $I \setminus D$ 上函数值为 0, 再积分 $\Longrightarrow$ 面积/体积的定义要求 ∂D 为零测集.

注意: 对 Riemann 积分而言, 我们需要的是 Jordan 零测. 但是由于 ∂D 是有界闭集, 在欧几里得空间中是紧的, 从而 Jordan 零测等价于 Lebesgue 零测. 当然即使 ∂D 不是零测的, 有些函数的重积分也可以有定义.

将一般区域转化为矩形区域:

$$\begin{cases} a_1 \le x_1 \le b_1 \\ a_2(x_1) \le x_2 \le b_2(x_1) \\ \cdots\cdots \\ a_n(x_1, \cdots, x_{n-1}) \le x_n \le b_2(x_1, \cdots, x_{n-1}) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 = a_1(1-t_1) + b_1 t_1 \\ x_2 = a_2(x_1)(1-t_2) + b_2(x_1)t_2 \\ \cdots\cdots \\ x_n = a_n(x_1, \cdots, x_{n-1})(1-t_n) + b_n(x_1, \cdots, x_{n-1})t_n \\ t_1, \cdots, t_n \in [0,1] \end{cases}$$

重积分换元

对于一个难求的重积分

$$\int_D f(x)\mathrm{d}x,$$

如果存在另一组坐标, 使得它的区域 U 与 D 通过 Φ $\mathscr{C}^1$ 微分同胚 (双射, 正反映射都是 $\mathscr{C}^1$), 那么

$$\int_D f(x)\mathrm{d}x = \int_U f(\Phi(t))|\det \mathrm{J}_\Phi|\mathrm{d}t$$

超过一维的积分无法进行 "有重叠" 的换元, 无论是无向的重积分, 还是有向的微分形式积分.

反向换元可以直接取 Jacobi 行列式的倒数.

常见的换元:

- 极坐标: $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$
- 椭圆坐标: $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$
- 双曲坐标 $(t = x^2 - y^2,\ s = 2xy)$: $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}t\mathrm{d}s/4\sqrt{t^2+s^2}$
- 柱坐标: $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$
- 球坐标: $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$

第一类曲线曲面积分

定义 0: 对于一维曲线, 可以通过分割的极限定义:

$$\int_\gamma f(x)\mathrm{d}l = \lim_{\max_k |P_kP_{k+1}|\to 0} \sum_k f(P_k)|P_kP_{k+1}|$$

然而二维以上的曲面要进行 (三角形, 四面体, ...) 划分会复杂, 而且并非任意划分都能收敛, 所以课内是以参数化的方式来定义第一, 二类曲线曲面积分的.

定义: 设曲面 Σ 有一个参数化 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t_1, \cdots, t_d)$ $((t_1, \cdots, t_d) \in D \subset \mathbb{R}^d)$, 在除了一个零测集外是正则的, 则

$$\int_\Sigma f(x)\mathrm{d}s = \int_D f(x(t_1, \cdots, t_d))\sqrt{\det G}\mathrm{d}t,$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t_1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t_1} \right\rangle & \cdots & \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t_1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t_d} \right\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t_d}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t_1} \right\rangle & \cdots & \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t_d}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t_d} \right\rangle \end{bmatrix}$$

可以通过行列式的变换说明, $\sqrt{\det G}$ 表示的含义就是 “面/体积微元”. 对于 Σ 与背景空间维数相同的情况, 这个值等于 Jacobi 矩阵行列式绝对值.

为什么 $\det G \geq 0$?

第一类曲线曲面积分

函数曲面 $x_{d+1}=f(x_1,\cdots,x_d)$:

$$\det G=\begin{vmatrix}1+\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_d}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_d}\frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & 1+\frac{\partial f}{\partial x_d}\frac{\partial f}{\partial x_d}\end{vmatrix}=\left|I+\nabla f\nabla f^{\top}\right|=1+\|\nabla f\|^2$$

隐函数曲面 $F(x_1,\cdots,x_{d+1})$:

$$\det G=\frac{\|\nabla F\|^2}{\frac{\partial F}{\partial x_{d+1}}}$$

参数化的良定义性, 即积分结果与参数化无关: 假设有另一个参数化 $s_1,\cdots,s_d$, 那么

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t_i},\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t_j}\right\rangle&=\left\langle\sum\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial s_k}\frac{\partial s_k}{\partial t_i},\sum\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial s_k}\frac{\partial s_k}{\partial t_j}\right\rangle\\&=\begin{bmatrix}\frac{\partial s_1}{\partial t_i} & \cdots & \frac{\partial s_d}{\partial t_i}\end{bmatrix}G_s\begin{bmatrix}\frac{\partial s_1}{\partial t_j}\\ \vdots\\ \frac{\partial s_d}{\partial t_j}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

第一类曲线曲面积分

因此

$$G_t = \left(\frac{\partial(s_1,\cdots,s_d)}{\partial(t_1,\cdots,t_d)}\right)^\top G_s \frac{\partial(s_1,\cdots,s_d)}{\partial(t_1,\cdots,t_d)}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{D_t} f(x(t_1,\cdots,t_d))\sqrt{\det G_t}\mathrm{d}t\\
=&\int_{D_t} f(x(t_1,\cdots,t_d))\sqrt{\det\left[\left(\frac{\partial(s_1,\cdots,s_d)}{\partial(t_1,\cdots,t_d)}\right)^\top G_s \frac{\partial(s_1,\cdots,s_d)}{\partial(t_1,\cdots,t_d)}\right]}\mathrm{d}t\\
=&\int_{D_t} f(x(t_1,\cdots,t_d))\sqrt{\det G_s}\left|\det\frac{\partial(s_1,\cdots,s_d)}{\partial(t_1,\cdots,t_d)}\right|\mathrm{d}t\\
=&\int_{D_s} f(x(t_1(s_1,\cdots,s_d),\cdots,t_d(s_1,\cdots,s_d)))\sqrt{\det G_s}\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

微分形式

k 阶微分形式在每一点都定义了一个 $(\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ 的 (多重) 线性函数, 具有反对称性. 可以证明 (外代数), 具有这样性质的微分形式在单点上一定能写成以下形式:

$$\omega = \sum_{i_1,\cdots,i_k} f_{i_1,\cdots,i_k} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

其中 $\mathrm{d}x_i$ 可以理解为 “取向量的第 i 维分量” 操作. $\wedge$ 为斜积

$$(\omega \wedge \mu)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \begin{vmatrix} \omega(\boldsymbol{v}) & \omega(\boldsymbol{w}) \\ \mu(\boldsymbol{v}) & \mu(\boldsymbol{w}) \end{vmatrix}$$

从而我们知道 $\omega \wedge \mu = -\mu \wedge \omega$, 以及 $\omega \wedge \omega = 0$.

定义微分形式的外微分

$$\mathrm{d}(f\omega_1 \wedge \cdots) = \mathrm{d}f \wedge \omega_1 \wedge \cdots = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots$$

有性质 $\mathrm{dd}\omega \equiv 0$, 这其实可以反过来 (以类似 $\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$ 的方式) 理解外微分的定义.

微分形式 (流形上) 的积分

微分形式的积分严格来说有极限的定义 (其实也需要依赖于局部参数化), 我们可以认为课内它的定义就是参数化: 设, 曲面 Σ 的保向正则参数化为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t_1,\cdots,t_d)$, 那么对于 d 维微分形式 ω,

$$\int_\Sigma \omega=\int_D \omega\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t_1},\cdots,\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t_d}\right)\mathrm{d}t.$$

同样可以利用微分形式的线性性证明, 积分结果与保向参数选择无关.

定向要求: 对于一维曲线, 切向量与曲线定向一致; 对于三维空间中的二维曲面, $\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t_1}\times\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t_2}$ 的方向要与法向量一致. 也就是说, “加符号” 这一步操作, 是出现在将微分形式的积分转化为重积分时做的. 例如如果一个曲面的定向是向 $-z$ 方向的, 那么

$$\iint_\Sigma \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=-\iint_{P_{xy}(\Sigma)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Q: 注意到, 课上只讲了比背景空间维数小 1 的超曲面上的定向. 如果要求, 比如四维空间中的二维曲面上的积分, 如何定义? ~~A: 不会考的~~

A: 可定向的流形上才能定义积分. 流形是无需考虑背景空间的, 在上面积分只需设定一致定向的局部参数化即可. 一维流形总是可定向.

微分形式积分的换元

假设有难求积分

$$\int_{\tilde{\Sigma}} \omega$$

它的坐标 $\boldsymbol{x}$ 可以以另一组坐标 $\boldsymbol{t}$ 表示: $\boldsymbol{x} = \Phi(\boldsymbol{t})$ (Φ 是 $\mathscr{C}^1$ 微分同胚), $\tilde{\Sigma} = \Phi(\Sigma)$, 那么

$$\int_{\tilde{\Sigma}} \omega = \int_{\Sigma} \Phi^*(\omega).$$

其中 $\Phi^*(\omega)$ 定义为, 对于 Σ 上的一个切向量 $\boldsymbol{v}$, 先依据 $\mathrm{D}\Phi$ 映到 $\tilde{\Sigma}$ 的切向量, 再作用 ω. 证明考虑参数化, 最后总是归结到重积分的换元.

实操上是很简单的, 直接展开即可. 例如 $\omega = h(x, y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, 换元关系式 $\Phi(u, v) = (f(u, v), g(u, v)) = (x, y)$, 那么

$$\begin{aligned}\Phi^*(\omega) &= h(f(u, v), g(u, v))\mathrm{d}(f(u, v)) \wedge \mathrm{d}(g(u, v)) \\ &= h(f(u, v), g(u, v)) \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}\right) \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.\end{aligned}$$

微分形式的积分除了用定义求, 还可以考虑凑外微分, 以及找对称性.

第二型曲线曲面积分

可以转化为微分形式的积分.

- 环量:

$$\boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=V_x\mathrm{d}x+V_y\mathrm{d}y+V_z\mathrm{d}z$$

- 二维通量:

$$\boldsymbol{V}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}l=-V_y\mathrm{d}x+V_x\mathrm{d}y$$

- 三维通量:

$$\boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=V_x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+V_y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+V_z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

证明通量转微分形式的表达式, 可以使用参数化. 同时参数化可以直接将第二型积分转成重积分:

对于超曲面, 定义参数化 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t_1,\cdots,t_d)$, 法向量可以这样得到:

$$L(\boldsymbol{v})=\det\left(\boldsymbol{v},\frac{\partial(x_1,\cdots,x_{d+1})}{\partial(t_1,\cdots,t_d)}\right),\boldsymbol{n}=\frac{\nabla L}{\|\nabla L\|}.$$

相应的单位高度体积微元及通量微元: $\mathrm{d}v=L(\boldsymbol{n})\mathrm{d}t=\|\nabla L\|\mathrm{d}t$,

$$\boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{V}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}v=\boldsymbol{V}\cdot\nabla L\mathrm{d}t=\det\left(\boldsymbol{V},\frac{\partial(x_1,\cdots,x_{d+1})}{\partial(t_1,\cdots,t_d)}\right)\mathrm{d}t.$$

Stokes 公式

偏微分定义 $\longrightarrow$ 将第二曲线曲面积分拆开证明 Stokes 公式 $\longrightarrow$ 极限形式 “第二定义”.

- 梯度积分 $\leftrightarrow$ 两端差
- 二维旋度 $\leftrightarrow$ 环量——Green 公式
- 二维散度 $\leftrightarrow$ 通量——Green 公式 (可以通过上一个转 90° 直接证明)
- 三维旋度 $\leftrightarrow$ 环量——Stokes 公式 (参数化到二维后用 Green 公式证明)
- 三维散度 $\leftrightarrow$ 通量——Gauss 公式

注意定向!

硬证方法: 拆成一堆小曲边梯形/曲面体, 积分里面把原函数写成偏导的积分, 一通化简抵消.

梯度场 $\Longleftrightarrow$ 保守场 $\Longrightarrow$ 无旋场. 单连通区域时后面可以改成 $\Longleftrightarrow$.

Helmholtz 分解: 任何三维有界区域内的向量场都可以分解为一个无旋场 + 一个无源场.

广义 Stokes 公式

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}\mathrm{d}\omega.$$

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0 \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^1 \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, phantom, "\nabla\times(\nabla f)=\mathbf{0}"] & \Omega^2 \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, phantom, "\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{V})=0"] & \Omega^3 \\
\mathbb{R}^1 \arrow[r, "\nabla"] \arrow[rr, bend left] \arrow[r, bend right] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\nabla\times"] \arrow[rr, bend left] \arrow[r, bend right] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\nabla\cdot"] \arrow[r, bend right] & \mathbb{R}^1
\end{tikzcd}$$

$$f|_{\partial\Gamma}=\int_{\Gamma}\nabla f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\oiint_{\partial\Omega}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\boldsymbol{V}\mathrm{d}v$$

$$\oint_{\partial\Sigma}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_{\Sigma}(\nabla\times\boldsymbol{V})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

级数

提一下几个点:

- 绝对收敛不仅适用于正负都有的实数级数, 也适用于任何定义了范数的级数.
- Leibniz 判别法在不单调时不能用, 例如 $\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha+(-1)^{n-1}}$ 在 $\alpha \leq \frac{1}{2}$ 时发散, $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ 时条件收敛.
- 如果 $a_n \to 0$, 级数加括号收敛, 则原级数收敛, 这个事情必须要求每个括号内同号. 反例: $\{n$ 个 $\frac{1}{n}$, n 个 $-\frac{1}{n}\}$.
- 说明函数项级数不一致收敛的方法: $\exists \varepsilon$, 对于 $N = 1, 2, 3, \cdots$, 都存在一个 x, 前 N 项和与极限值差 $> \varepsilon$.
- 若 $[a, b)$ 上 $\sum_n f_n(x) = f(x)$, $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$ 并不说明不一致收敛 (必须加要求 f_n 各自有界才行). $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续也并不说明一致连续: 例如 $f_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2} - 2(n-1)^2xe^{-(n-1)^2x^2}$, $\sum_n f_n(x) = 0$, 但 $\int_0^1 \sum_n f_n(x) = 0$, $\sum_n \int_0^1 f_n(x)dx = \sum_n (e^{-(n-1)^2} - e^{-n^2}) = 1$, 积分可交换的逆否命题说明不一致收敛.

收敛判定方法

判定条件	Cauchy	比较	Dirichlet	Abel
广义积分收敛	1	2	3	4
广义含参积分一致收敛	5	6	7	8
数项级数收敛	9	10	11	12
函数项级数一致收敛	13	14	15	16

收敛判定方法

1. $\int_a^\omega f(x)\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $\forall\varepsilon>0$，$\exists b<\omega$，$\forall b_2\geq b_1>b$，$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$。
2. 若 $\int_a^\omega g(x)\mathrm{d}x$ 收敛且 $\exists b<\omega$，$x\in(b,\omega)$ 时 $|f(x)|\leq g(x)$，则 $\int_a^\omega f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。
3. 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$（关于 b）有界且 $g(x)$ 单调 $\to 0$，则 $\int_a^\omega f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛。
4. 若 $\int_a^\omega f(x)\mathrm{d}x$ 收敛且 $g(x)$ 单调有界，则 $\int_a^\omega f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛。
5. $\int_a^\omega f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 I 上一致收敛当且仅当 $\forall\varepsilon>0$，$\exists b<\omega$，$\forall y\in I$，$\forall b_2\geq b_1>b$，$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$。
6. 若 $\int_a^\omega g(x,y)\mathrm{d}x$ 一致收敛且 $\exists b<\omega$，$x\in(b,\omega)$ 时 $|f(x,y)|\leq g(x,y)$，则 $\int_a^\omega f(x,y)\mathrm{d}x$ 一致收敛。
7. 若 $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 对 b 和 y 一致有界，$g(x,y)$ 关于 x 单调且 $x\to\omega$ 时一致 $\to 0$，则 $\int_a^\omega f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x$ 一致收敛。
8. 若 $\int_a^\omega f(x,y)\mathrm{d}x$ 一致收敛，$g(x,y)$ 关于 x 单调且对 x 和 y 一致有界，则 $\int_a^\omega f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x$ 一致收敛。
9. $\sum_n a_n$ 收敛当且仅当 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$\forall N_2\geq N_1>N$，$\left\|\sum_{n=N_1}^{N_2} a_n\right\|<\varepsilon$。
10. 若正项级数 $\sum_n b_n$ 收敛且 $\|a_n\|=\mathrm{O}(b_n)$，则 $\sum_n a_n$ 绝对收敛。
11. 若 $\sum_n a_n$ 部分和有界，b_n 单调且 $\to 0$，则 $\sum_n a_nb_n$ 收敛。
12. 若 $\sum_n a_n$ 收敛，b_n 单调有界，则 $\sum_n a_nb_n$ 收敛。
13. $\sum_n f_n(x)$ 在 I 上一致收敛当且仅当 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$\forall x\in I$，$\forall N_2\geq N_1>N$，$\left|\sum_{n=N_1}^{N_2} f_n(x)\right|<\varepsilon$。
14. 若恒正的函数项级数 $\sum_n g_n(x)$ 一致收敛且 $\forall x\in I$，$|f_n(x)|=\mathrm{O}(g_n(x))$，则 $\sum_n f_n(x)$ 一致收敛。
15. 若 $\sum_n f_n(x)$ 部分和一致有界，$g_n(x)$ 关于 n 单调且一致 $\to 0$，则 $\sum_n f_n(x)g_n(x)$ 一致收敛。
16. 若 $\sum_n f_n(x)$ 一致收敛，$g_n(x)$ 关于 n 单调且一致有界，则 $\sum_n f_n(x)g_n(x)$ 一致收敛。

收敛判定方法

正项级数. 若部分和有界则收敛。

积分判别法. 若 a_n 能扩展为减函数 $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$，则 $\sum_n a_n=\sum_n f(n)$ 收敛 $\iff \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

“夹逼”判别法. 若 $a_n\le b_n\le c_n$ 且 $\sum_n a_n$ 与 $\sum_n c_n$ 都收敛，则 $\sum_n b_n$ 收敛。若 $\sum_n a_n$ 或 $\sum_n c_n$ 绝对收敛，则另外两个也绝对收敛。

D'Alembert. 若 $\overline{\lim}_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ 则 $\sum_n a_n$ 绝对收敛，若 $\underline{\lim}_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$，则 $\sum_n a_n$ 发散。

Cauchy. 若 $\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1$ 则 $\sum_n a_n$ 绝对收敛，若 $\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}>1$，则 $\sum_n a_n$ 发散。

幂级数. $\frac{1}{R}=\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$。

Raabe. 对于正项级数，若 $\underline{\lim}_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>1$ 则 $\sum_n a_n$ 收敛，若 $\overline{\lim}_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1$，则 $\sum_n a_n$ 发散。

Leibniz. 对于单调不增的 $a_n\ge 0$，$\sum_n(-1)^n a_n$ 收敛仅要求 $a_n\to 0$。

Hardy. 若 $\sum_n f_n(x)$ 部分和一致有界，$\sum_n |g_{n+1}(x)-g_n(x)|$ 一致收敛且 $g_n(x)$ 一致 $\to 0$，则 $\sum_n f_n(x)g_n(x)$ 一致收敛。

换序充分条件

换序条件	极限	求导	积分	广义积分	级数
极限	1				
求导	2	3			
积分	4	5	6		
广义积分	7	8	9	10	
级数	11	12	13	14	15

换序充分条件

1. 若 $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ 在 $U(x_0)$ 内**一致**收敛，$\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ 在 $U(y_0)$ 内收敛，则 $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ 与 $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在且相等。
2. 若 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)$ 在 $U(x_0)$ 内存在且求导的极限**一致**收敛，$\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ 在 $U(y_0)$ 内收敛，则 $\frac{\partial}{\partial y}(\lim_{x\to x_0} f(x,y))\big|_{y=y_0}$ 与 $\lim_{x\to x_0}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)$ 存在且相等。
3. 若 $\frac{\partial f}{\partial x\partial y}$ 在 $U(x_0,y_0)$ 内存在且**连续**，$\frac{\partial f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$ 存在，则 $\frac{\partial f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$。
4. 若 f 在 $[a,b]\times U(y_0)$ 内**连续**，则 $\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b f(y_0)\mathrm{d}x$。
5. 若 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $[a,b]\times U(y_0)$ 内**连续**，则 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\Big|_{y=y_0}=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\mathrm{d}x$。
6. 若 f 在 $[a,b]\times[c,d]$ 内**连续**，则 $\int_a^b\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。
7. 若 f 在 $[a,\omega)\times U(y_0)$ 内**连续**，且 $\int_a^\omega f(x,y)\mathrm{d}x$ **一致**收敛，则 $\lim_{y\to y_0}\int_a^\omega f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^\omega f(x,y_0)\mathrm{d}x$。
8. 若 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $[a,\omega)\times U(y_0)$ 内**连续**，且 $\int_a^\omega\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x$ **一致**收敛，且 $\int_a^\omega f(x,y_0)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^\omega f(x,y)\mathrm{d}x$ 在闭区间上一致收敛，且 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_a^\omega f(x,y)\mathrm{d}x\right)=\int_a^\omega\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x$。
9. 若 f 在 $[a,\omega)\times[c,d]$ 内**连续**，且 $\int_a^\omega f(x,y)\mathrm{d}x$ **一致**收敛，则 $\int_a^\omega\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_c^d\int_a^\omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。
10. 若 f 在 $[a,\omega)\times[c,\psi)$ 内**连续**，且 $\int_a^\omega f(x,y)\mathrm{d}x$ **一致**收敛，$\int_c^\psi f(x,y)\mathrm{d}y$ **一致**收敛，$\int_a^\omega\int_c^\psi|f(x,y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^\psi\int_a^\omega|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ **至少一个**收敛，则 $\int_a^\omega\int_c^\psi f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ 与 $\int_c^\psi\int_a^\omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 存在且相等。
11. 若 $\sum_n f_n(x)$ 在 $U(x_0)$ 上**一致**收敛，且 $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ 存在，则 $\sum_n\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0}\sum_n f_n(x)$ 存在且相等。
12. 若 $\sum_n f_n(x)$ 满足在 $U(x_0)$ 上 $f_n'(x)$ 存在且连续，且 $\sum_n f_n'(x)$ **一致**收敛，且 $\sum_n f(x_0)$ 收敛，则 $\sum_n f_n(x)$ 在闭区间上一致收敛，且 $(\sum_n f_n(x))'=\sum_n f_n'(x)$。
13. 若 $\sum_n f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上**一致**收敛，且 $\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 可积，则 $\sum_n\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b\sum_n f_n(x)\mathrm{d}x$ 存在且相等。
14. 若在 $[a,\omega)$ 上 $\sum_n f_n(x)=f(x)$，且存在可积函数 $F(x)$ 使 $\forall N$，$\left|\sum_{n=1}^N f_n(x)\right|\le F(x)$，则 $\sum_n\int_a^\omega f_n(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^\omega\sum_n f_n(x)\mathrm{d}x$ 存在且相等。(控制收敛定理)
15. 若 $\sum_{m,n}a_{m,n}$ 能通过安排顺序变为绝对收敛的级数，则 $\sum_{m,n}a_{m,n}$ 绝对收敛，且等于 $\sum_m\sum_n a_{m,n}=\sum_n\sum_m a_{m,n}$。